πανελλαδικές εξετάσεις 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Άλγεβρα)

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:55

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: **2-6-2026**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Άλγεβρα)**

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1.

Η σχετική συχνότητα της τιμής x_i ορίζεται ως $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, όπου ν_i η (απόλυτη) συχνότητα της x_i και ν το μέγεθος του δείγματος. Τότε:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_k}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

Α.2.

Διατάσσουμε τις ν παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Διάμεσος (δ) ονομάζεται:

• αν το ν είναι *περιττός*, η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή αυτή που βρίσκεται στη θέση $\frac{\nu+1}{2}$,

• αν το ν είναι *άρτιος*, το ημιάθροισμα (μέσος όρος) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή αυτών στις θέσεις $\frac{\nu}{2}$ και $\frac{\nu}{2}+1$.

Α.3.

Συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f ονομάζεται η συνάρτηση $f' : \mathrm{B} \to \mathbb{R}$ που σε κάθε $x \in \mathrm{B}$ αντιστοιχίζει την παράγωγο της f στο σημείο αυτό:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Α.4.

α → Λάθος

β → Σωστό

γ → Σωστό

δ → Λάθος

ε → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Β.1. $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)'=x^2-2x-3,\ x\in\mathbb{R}$

Β.2. $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16>0 \ \text{ 2 λύσεις άνισες}$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2\pm4}{2}\begin{cases}x_1=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3\\ x_2=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

Η μονοτονία προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	ΤΟΠ. ΜΕΓ.	$\searrow$	ΤΟΠ. ΕΛ.	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-1$ το

$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=-\frac{1}{3}-1+3+1=-\frac{1}{3}+3=-\frac{1}{3}+\frac{9}{3}=\frac{8}{3}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=3$ το

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot3^3-3^2-3\cdot3+1=\frac{27}{3}-9-9+1=9-9-9+1=-8$$

Β.3.

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{A}(0,f(0))$ είναι της μορφής $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$.

$$f(0)=\frac{1}{3}0^3-0^2-3\cdot0+1=1.$$

Άρα αναζητούμε εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{A}(0,1)$.

$f'(0)=0^2-2\cdot 0-3=-3$ άρα $(\varepsilon): y=-3x+\beta$

Το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$ είναι σημείο της εφαπτομένης, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή για $x=0$ και $y=1$ έχουμε:

$1=-3\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$

Τελικά η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{A}(0,1)$ είναι η $(\varepsilon): y=-3x+1$.

Β.4.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{*}{=}}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-3)=-1-3=-4$$

Horner στην παράσταση x^2-2x-3 με $\rho=-1$

1	-2	-3	-1
↓	-1	3	
1	-3	0	

Άρα $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ.1.

Ο μέσος αριθμός βιβλίων είναι $\bar{x}=4$ επομένως

$$\frac{4+5+4+k+0+3+7}{7}=4\Leftrightarrow\frac{23+k}{7}=4\Leftrightarrow 23+k=28\Leftrightarrow k=5$$

Γ.2.

Για $k=5$ έχουμε τις παρατηρήσεις $4,5,4,5,0,3,7$

Σε αύξουσα σειρά: $0,3,4,4,5,5,7$

Περιττό πλήθος παρατηρήσεων, άρα η διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση, $\delta=t_4=4$.

Γ.3.

Η διακύμανση είναι:

$$s^2=\frac{(0-4)^2+(3-4)^2+2(4-4)^2+2(5-4)^2+(7-4)^2}{7}=\frac{16+1+2\cdot 0+2\cdot 1+9}{7}=\frac{28}{7}=4$$

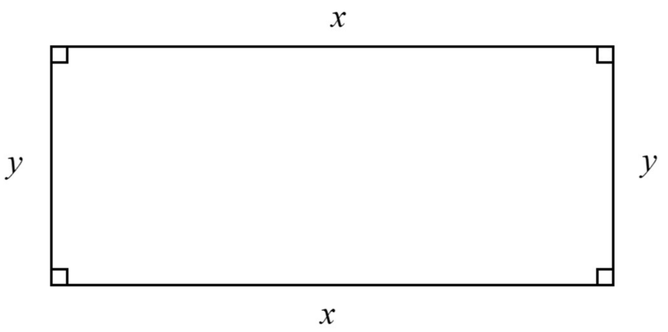
Γ.4.

Η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$ οπότε $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}\cdot 100\%=\dfrac{2}{4}\cdot 100\%=50\%$.

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού $CV=50\%>10\%$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ.1.



Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι $x\cdot y=100$, άρα $y=\dfrac{100}{x}$ με $x>0$

Για την περίμετρο έχουμε:

$$\Pi(x)=2x+2y,\ x>0$$

$$\Pi(x)=2x+2\frac{100}{x},\ x>0$$

$$\Pi(x)=2x+\frac{200}{x},\ x>0$$

Δ.2.

Για $x>0$

$$\Pi'(x)=\left(2x+\frac{200}{x}\right)'=2-\frac{200}{x^2}=\frac{2}{1}-\frac{200}{x^2}=\frac{2x^2}{x^2}-\frac{200}{x^2}=\frac{2x^2-200}{x^2},\ x>0$$

$$\Pi'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-200}{x^2}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2-200=0\Leftrightarrow 2x^2=200\Leftrightarrow x^2=100\Leftrightarrow x=\pm 10$$

Αφού $x>0$, έχουμε $x=10$

Η μονοτονία προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
$2x^2-200$		+	0	−	‖	−	0	+	
x^2		+		+	‖	+		+	
$\Pi'(x)$		+		+	‖	−	0	+	
Π					‖	↘	ΟΛ. ΕΛ.	↗	

Η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10]$.

Η Π είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[10,+\infty)$.

Η Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=10$ το

$$\Pi(10)=2\cdot 10+\frac{200}{10}=20+20=40\,m$$

Για την μικρότερη περίμετρο έχουμε:

$x=10m$ άρα $y=\dfrac{100}{10}=10m$, άρα το σχήμα είναι τετράγωνο.

Δ.3.

$x_{1,}x_2\in(0,10)$ όπου Π γνησίως φθίνουσα από Δ2 άρα

$x_1<x_2 \overset{\Pi\searrow}{\Leftrightarrow} \Pi(x_1)>\Pi(x_2)\Leftrightarrow \Pi(x_1)-\Pi(x_2)>0$ επίσης $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-x_2<0$

Άρα $\mathrm{A}=\dfrac{\Pi(x_1)-\Pi(x_2)}{x_1-x_2}<0$

Δ.4.

$$\lim_{x\to 10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\dfrac{2x^2-200}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{10x}-10}{1}}=\lim_{x\to 10}\frac{2x^2-200}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{2\left(x^2-100\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2(10x-100)}=\lim_{x\to 10}\frac{2\cancel{(x-10)}(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2\cancel{(x-10)}}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2}=\frac{2\cdot 20\cdot 20}{10\cdot 100}=\frac{800}{1000}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$