πανελλαδικές εξετάσεις 2026

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΜΑΘΗΜΑ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.

## ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:21

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: **3-6-2026**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.**

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ**
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

## ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολικό σελίδα 133

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμή. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ① .

Επειδή το $\xi$ είναι εσωτερικό σημείο του $\Delta$, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της ① είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A.2. Σχολικό σελίδα 51

Έστω οι συναρτήσεις $f, g, h$. Αν:

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο $x_0$ και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

A.3. Σχολικό σελίδα 185

Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της $f$ στο $\Delta$ ονομάζεται κάθε συνάρτηση $F$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta$ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

A.4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

## ΘΕΜΑ Β

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\ln(x-1)$

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}+1$

Β.1. Για την συνάρτηση $h=f\circ g$.

$$A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g : g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\geq 2:\sqrt{x-2}+1>1\right\}=\left\{x\geq 2:\sqrt{x-2}>0\right\}=$$

$$=\left\{x\geq 2: x-2>0\right\}=\left\{x\geq 2: x>2\right\}=(2,+\infty)$$

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x-2}+1\right)=2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)=$$

$$=2\ln\left(\sqrt{x-2}\right)=\ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\ln(x-2)$$

Β.2. $h(x)=\ln(x-2),\ x\in(2,+\infty)$

Για κάθε $x_1,x_2\in A_h$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-2<x_2-2\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln(x_1-2)<\ln(x_2-2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα $h\nearrow$ στο διάστημα $(2,+\infty)$ άρα $h$ "$1-1$" άρα $h$ αντιστρέφεται.

β' τρόπος

Για κάθε $x_1,x_2\in A_h$ με $h(x_1)=h(x_2)$ έχουμε:

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow \ln(x_1-2)=\ln(x_2-2)\overset{\ln x\ \text{"}1-1\text{"}}{\Leftrightarrow} x_1-2=x_2-2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα $h$ "$1-1$" άρα $h$ αντιστρέφεται.

γ' τρόπος

Η $h$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για $x>2$ με

$$h'(x)=\left[\ln(x-2)\right]'=\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)'=\frac{1}{x-2}>0 \text{ για } x\in(2,+\infty)$$

Άρα $h\nearrow$ στο διάστημα $(2,+\infty)$ άρα $h$ "$1-1$" άρα $h$ αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης, θέτουμε $y=h(x)$.

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=\ln(x-2)\overset{e^x\ \text{"}1-1\text{"}}{\Leftrightarrow} e^y=e^{\ln(x-2)}\Leftrightarrow e^y=x-2\Leftrightarrow x=e^y+2,\ x\in A_h$$

Έχουμε $x>2\Leftrightarrow e^y+2>2\Leftrightarrow e^y>0$ που ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$, άρα $A_{h^{-1}}=\mathbb{R}$.

Επομένως $h^{-1}(y)=e^y+2$ με $y\in\mathbb{R}$ άρα $h^{-1}(x)=e^x+2$ με $x\in\mathbb{R}$.

β' τρόπος

Η $h$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$h((2,+\infty))=\left(\lim_{x\to 2^+}h(x),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right)=\left(\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2),\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)\right)=\mathbb{R} \text{ αφού}$$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)\underset{\substack{x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-2}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)\underset{\substack{x\to+\infty\\ v\to+\infty}}{\overset{v=x-2}{=}}\lim\limits_{v\to+\infty}\ln v=+\infty$

**B.3.** $\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right)\overset{(-\infty)\cdot 2}{=}-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{\left(2\ln(x-1)\right)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x-1}=2 \text{ και}$$

$\lim_{x\to 2^+}(x-2)=0$ άρα $\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2)\underset{\substack{x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-2}{=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$

## <u>ΘΕΜΑ Γ</u>

**Γ.1.**

i) Η $f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ οπότε το όριο $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$.

Αν $\kappa\neq 0$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\kappa x=\begin{cases}-\infty, & \kappa<0\\ +\infty, & \kappa>0\end{cases}$ άτοπο.

Αν $\kappa=0$ έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x}{x^2+1}=0$ για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$

άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

ii) Η $y=x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $f$ στην αρχή των αξόνων άρα $f(0)=0$ που ισχύει και $f'(0)=1$.

Έχουμε $f'(x)=\frac{(\mu x)'(x^2+1)-(\mu x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{\mu(x^2+1)-(\mu x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{\mu x^2+\mu-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{\mu-\mu x^2}{(x^2+1)^2}$

Άρα $f'(0)=\mu\Rightarrow\mu=1$

**Γ.2.** Έχουμε $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

i) Η $f$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow -x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

$$f'(x)>0\Rightarrow\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}>0\Rightarrow -x^2+1>0\Rightarrow x\in(-1,1)$$

$$f'(x)<0\Rightarrow\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}<0\Rightarrow -x^2+1<0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | ΤΟΠ.ΕΛ. | $\nearrow$ | ΤΟΠ.ΜΕΓ. | $\searrow$ | |

Η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=-1$ το $f(-1)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$ και ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

ii) Για $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1)$ η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(\mathrm{A}_1)=\left(\lim_{x\to -1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

Διότι $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

Για $\mathrm{A}_2=[-1,1]$ η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f(\mathrm{A}_2)=\left[f(-1),f(1)\right]=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Διότι $f(-1)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

$$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Για $\mathrm{A}_3=(1,+\infty)$ η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(\mathrm{A}_3)=\left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

Διότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Επομένως $f(D_f)=f(\mathrm{A}_1)\cup f(\mathrm{A}_2)\cup f(\mathrm{A}_3)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Για την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ έχουμε:

Αν $\alpha\neq 0$ είναι $\alpha^2>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}=f_{\max}$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $\alpha=0$ είναι $f(x)=\frac{1}{2}$ οπότε μοναδική ρίζα η $x=1$.

Γ.3.

$$\left.\begin{aligned} I_\nu &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx \quad ① \\ I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+1+2}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cancel{\left(1+x^2\right)}}{\cancel{x^2+1}}dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx = \left[\frac{x^{2\nu+1+1}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

$$① \overset{\nu=0}{\Rightarrow} I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln(1+1) - \ln(0+1)\right) = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$$

για $\nu = 0$ έχουμε $\left.\begin{aligned} I_0 + I_1 &= \frac{1}{2\cdot 0+2} = \frac{1}{2} \\ I_0 &= \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

για $\nu = 1$ έχουμε $I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$